B.Sc. (Part III) Internal Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time: Three Hours

Maximum Marks : 100

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) मान लीजिए :

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4 + 1},$$

तो $f_x\,(1, 2)$ और $f_y\,(1, 2)$ का मूल्यांकन कीजिए।

Let :

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4 + 1},$$

then evaluate $f_x(1, 2)$ and $f_y(1, 2)$.

(ब) फलन :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & \text{जब } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{जब } f(x, y) = f(0,0) \end{cases}$$

के लिए श्वार्ज प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify Schwarz's theorem for the function :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & \text{when } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{when } f(x, y) = f(0,0) \end{cases}$$

(स) फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए जबकि फलन परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -3 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

Find the Fourier series for the function $f(x)$ defined by :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -3 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2\. (अ) मान लीजिए :

$$f(x) = \sin x \ \forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

तथा मान लीजिए :

$$P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots\ldots, \frac{n\pi}{2n}\right\}, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

का विभाजन है। U (P, f) और L (P, f) की गणना कीजिए। अतः सिद्ध कीजिए कि $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ।

Let :

$$f(x) = \sin x \text{ for } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

and let

$$P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots\ldots, \frac{n\pi}{2n}\right\}$$

be the partition of $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Compute U (P, f) and L (P, f). Hence prove that $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(ब) $\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2 - x}}\, dx$ के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of $\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2 - x}}\, dx$.

(स) प्राचाल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से दर्शाइये कि :

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(\alpha x)}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\log(1+\alpha) \text{ यदि } \alpha \geq 0$$

With the help of differentiation with respect to parameter show that :

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(\alpha x)}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\log(1+\alpha) \text{ if } \alpha \geq 0$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दर्शाइये कि $u = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ हार्मोनिक है तथा इसका हार्मोनिक संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

Show that $u = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

(ब) दर्शाइये कि रूपान्तरण $w = \frac{iz+2}{4z+i}$, z-समतल के वास्तविक अक्ष को w-समतल के एक वृत्त में प्रतिचित्रित करता है। वृत्त का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए और z-समतल में उस बिन्दु को ज्ञात कीजिए जो वृत्त के केन्द्र पर प्रतिचित्रित होता है।

Show that the transformation $w = \frac{iz+2}{4z+i}$, maps the real axis in the z-plane into a circle in the w-plane. Find the centre and the radius of the circle and the point in the z-plane which is mapped on the centre of the circle.

(स) दर्शाइये कि $w = \sqrt{z}$ वृत्तों के परिवार $|z-1| = \lambda$ को द्विपाशी वक्रों लेमनिस्केट के परिवार $|w-1||w+1| = \lambda$ में रूपान्तरित करता है ।

Show that the mapping $w = \sqrt{z}$ transforms the family of circles $|z-1| = \lambda$ into the family of lemniscates $|w-1||w+1| = \lambda$.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) दर्शाइये कि फलन $d : c[a,b] \times c[a,b] \to \mathrm{R}$, जो कि निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$d(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$c\,[a,\,b]$ पर एक दूरीक है, जहाँ $x, y \in \mathrm{C}[a,b]$ तथा समाकलन रीमान् के अर्थ में लिया गया है।

Show that the function $d : c[a,b] \times c[a,b] \to R$ defined by :

$$d(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

is a metric on $c\ [a, b]$, where $x, y \in C[a, b]$ and the integration is taken in sense of Riemann.

(ब) सिद्ध कीजिए कि ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 8 है।

Prove that there exists no rational number whose square is 8.

(स) बनाख स्थिर बिन्दु प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Banach fixed point theorem.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) मान लीजिए (X, d) एक द्वितीय गणनीय समष्टि है। यदि X में एक अरिक्त विवृत समुच्चय G विवृत समुच्चयों के वर्ग $\{G_i : i \in I\}$ के संघ के रूप में व्यक्त होता हो, तो G को G_i's के गणनीय संघ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

Let (X, d) be a second countable space. If a non-empty open set in X is represented as the union of a class $\{G_i : i \in I\}$ of open sets, then G can be represented as a countable union of G_i's.

(ब) मान लीजिए (X, d) तथा (Y, ρ) दो दूरीक समष्टियाँ हैं और $f : X \to Y$ एक फलन है। तब f संतत है, यदि और केवल यदि $f^{-1}(G)$, X में विवृत है जब कभी G, Y में विवृत है।

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and $f : X \to Y$ be a function. Then f is continuous if and only if $f^{-1}(G)$ is open in X whenever G is open.

(स) दिखाइये कि एक सम्बद्ध समुच्चय का संतत प्रतिबिम्ब संबद्ध होता है।

Show that continuous image of a connected set is connected.

4,500